Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования «Белорусский государственный университет   
информатики и радиоэлектроники»

Факультет информационных технологий и управления

Кафедра систем управления

Дисциплина: Математические основы теории систем

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

к курсовому проекту

на тему

Математические модели систем управления и методы оптимизации

БГУИР КП 1-53 01 07 022 ПЗ

Студент: гр.022402 Сеглюк И.О.

Руководитель: ассистент Стасевич Н.А.

Минск 2021

# Реферат

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ : курсовой проект / И.О. Сеглюк – Минск: БГУИР, 2021, – п.з. – 53 с., чертежей (плакатов) – 4 л. формата А2.

Целью курсового проекта является построение математических моделей линейных систем управления и их моделирование, а также изучение методов оптимизации задач линейного и нелинейного программирования.

По исходной передаточной функции получены уравнения состояния в нормальной и канонической формах и составлены схемы моделей. Приведено моделирование в пакете Matlab/Simulink. Построены временные и частотные характеристики систем.

При изучении методов оптимизации задачи линейного программирования, был получен оптимальный план и экстремальное значение целевой функции симплекс методом. Установлено соответствие между переменными прямой и двойственной задач.

Решение задачи нелинейного программирования было получено методом безусловного экстремума (метод Ньютона-Рафсона, метод наискорейшего спуска). Для нахождения экстремума функции с учетом системы ограничений были использованы методы Зойтендейка, Куна-Таккера, линейных комбинаций. Приведены графические интерпретации соответствующих методов.

Учреждение образования

«Белорусский государственный университет информатики   
и радиоэлектроники»

Факультет информационных технологий и управления

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

*––––––––––––––––––––––––*(подпись)

–––––––––––––2021

ЗАДАНИЕ

по курсовому проектированию

Студенту    *Сеглюк Ирине Олеговне–––––––––––––––––––*

1. Тема проекта   Математические модели систем управления и методы оптимизации

2. Срок сдачи студентом законченного проекта 10 декабря *2021г.*

3. Исходные данные к проекту*1.Передаточная функция исследуемой системы имеет вид W(s) =*

*2.Математическая модель задачи линейного программирования:функция цели*

*F(x)=4x1-4x2-4x3(max); ограничения представлены системой 2x1-3x2-2x3=-9, -3x1+2x2+x3>=0, x2+x3<=6, 5x1+3x2-5x3<=9, x1,x2,x3>=0.*

*3.Целевая нелинейная функция F(x)=-7x1^2-5x2^2+6x1\*x2+2x1+x2;*

*Линейные ограничения имеют вид 2x1-5x2+10<=0; 6x1+5x2-50<=0; x1>=0; x2>=0.*

*Начальная точка x0 = [ ; ]*

4. Содержание расчетно-пояснительной записки (перечень вопросов, которые подлежат разработке)

*Введение. 1.Исследование системы управления.*

*1.1.Вычисление и построение в MATLAB временных характеристик системы.*

*1.2.Построение асимптотических логарифмических частотных характеристик. 1.3.Составление уравнений состояния в нормальной и канонической формах .Моделирование системы. 1.4.Решение уравнений*

*состояния в канонической форме.*

*2.Линейное программирование.*

*2.1.Расчет оптимального плана и экстремального значения функции цели.*

*2.2.Исследование двойственной задачи линейного программирования.*

*2.3.Нахождение целочисленного решения задачи.*

*3.Нелинейное программирование.*

*3.1. Нахождение безусловного эктремума функции F(x) .*

*3.2.Нахождение экстремума функции F(x) cучетом системы ограничений.*

*Заключение.*

5. Перечень графического материала (с точным обозначением обязательных чертежей и графиков)

*1.Частотные характеристики. Структуры моделей системы. Результаты моделирования.*

*2.Схема алгоритма метода Зойтендейка.. Траектории продвижения к экстремуму методом наискорейшего спуска и*

*методом Зойтендейка.*

6. Дата выдачи задания 1 сентября *2021г.*

7. Календарный график работы над проектом на весь период проектирования (с обозначением сроков выполнения и трудоемкости отдельных этапов):

*Раздел 1 к 30.09.2021– 30 %;–*

*раздел 2 к 20.10.2021– 25 %;–*

*раздел 3 к 30.11.2021 – 30 %;*

*оформление к 10.12.2021– 15%.*

*Защита курсового проекта с 10 по 20 декабря 2021г.–2*

РУКОВОДИТЕЛЬ*–*

Н.А. Стасевич*.–––––––А–––ААААа.ВА*

(подпись)

Задание принял к исполнению *–––––––\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_–– И.О. Сеглюк*

(дата и подпись студента)

**Содержание**

[Введение 6](#_Toc405804130)

[1 Исследование систем управления 7](#_Toc405804131)

[1.1 Вычисление и построение в Matlab временных характеристик систем 7](#_Toc405804132)

[1.2 Построение асимптотических логарифмических частотных характеристик 11](#_Toc405804133)

[1.3 Составление уравнений состояний в нормальной и канонической формах 13](#_Toc405804134)

[1.4 Решение уравнений состояния в канонической форме 18](#_Toc405804135)

[2 Линейное программирование 20](#_Toc405804136)

[2.1 Расчет оптимального плана и экстремального значения функции цели 20](#_Toc405804137)

[2.2 Исследование двойственной задачи линейного программирования 24](#_Toc405804138)

[2.3 Нахождение целочисленного решения задачи 27](#_Toc405804139)

[3 Нелинейное программирование 30](#_Toc405804140)

[3.1 Нахождение безусловного экстремума функции *F*(*x*) 30](#_Toc405804141)

[3.2 Нахождение экстремума функции *F*(*x*) с учетом системы ограничений 36](#_Toc405804142)

[Заключение 51](#_Toc405804143)

[Список использованных источников 52](#_Toc405804144)

[Ведомость документов 53](#_Toc405804144)

# Введение

Методы оптимизации находят широкое применение в различных областях науки и техники. Эти методы успешно применяются в решении задач технического проектирования устройств и систем, организационно-экономических и других задач.

В наиболее общем смысле теория оптимизации представляет собой совокупность фундаментальных математических результатов и численных методов, которые позволяют найти наилучший вариант из множества альтернатив и избежать при этом полного перебора и оценивания возможных решений. Знание методов оптимизации является необходимым для инженерной деятельности при создании новых, более эффективных и менее дорогостоящих систем, а также при разработке методов повышения качества функционирования существующих систем [2].

Целью курсового проекта является построение математических моделей линейных систем управления и их моделирование, а также изучение методов оптимизации задач линейного и нелинейного программирования.

Первый раздел посвящен анализу заданной с помощью передаточной функции системы. В этом разделе для этой функции построены переходные и логарифмические амплитудно- и фазочастотная характеристики, а также построены схемы модели в пространстве состояний в нормальной и канонической формах и решено уравнение состояния в канонической форме.

Второй раздел посвящен решению задач линейного программирования. В этом разделе приведено решение прямой задачи линейного программирования и соответствующей ей двойственной задачи, а также целочисленной задачи с помощью симплекс-таблиц.

Третий раздел посвящен решению задач нелинейного программирования. В этом разделе приведено решение такой задачи без ограничений методами Ньютона-Рафсона и наискорейшего спуска, а также с ограничениями методами допустимых направлений Зойтендейка, Куна-Таккера и линейных комбинаций. Результаты решения различными методами сравнены между собой.

# 1 Исследование систем управления

## 1.1 Вычисление и построение в Matlab временных характеристик систем

Передаточная функция системы – отношение изображения выходного сигнала к входному сигналу при нулевых начальных условиях.

Передаточная функция имеет вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.1) |

Характеристическое уравнение системы определяется знаменателем передаточной функции и имеет вид:

. (1.2)

Найдем корни характеристического уравнения:

.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

. (1.3)

Передаточная функция в форме нулей и полюсов имеет вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.4) |

Импульсная переходная характеристика – процесс изменения сигнала на выходе при подаче на вход -функции.

Определим как обратное преобразование Лапласа от передаточной функции:

. (1.5)

Разложим передаточную функцию (1.4) на сумму простых слагаемых:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.6) |

Найдем коэффициенты по методу неопределенных коэффициентов:

Передаточная функция примет вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.7) |

В соответствии с формулой (1.5), таблицами преобразования Лапласа, найдем импульсную переходную характеристику:

. (1.8)

Вид импульсной переходной характеристики, построенный в пакете Matlab, представлен на рисунке 1.1.

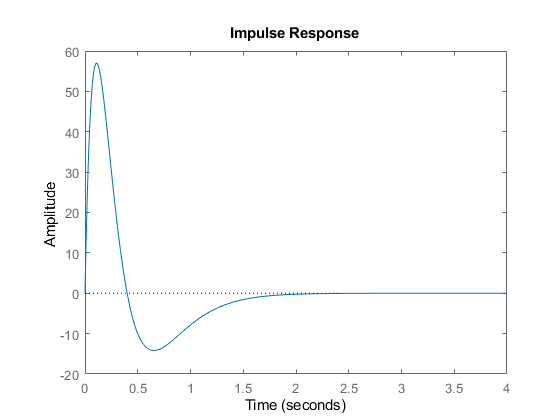


Рисунок 1.1 – График импульсной переходной характеристики

Переходная характеристика – процесс изменения сигнала на выходе при подаче на вход единичного ступенчатого воздействия.

Для получения аналитической формы переходной характеристики дополним систему интегратором:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.9) |

С помощью метода неопределенных коэффициентов найдем коэффициенты :

Тогда выражение примет вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.10) |

Определим как обратное преобразование Лапласа от :

. (1.11)

(1.12)

Вид переходной характеристики построенный в пакете Matlab представлен на рисунке 1.2.

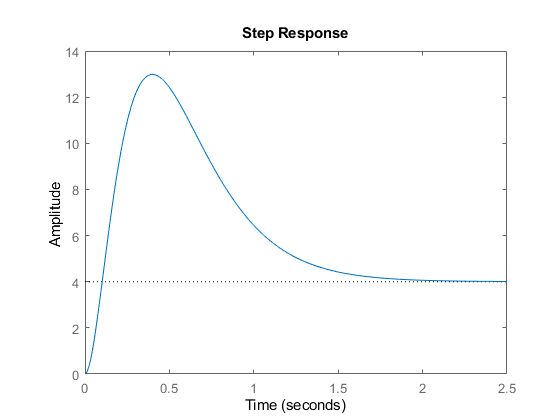


Рисунок 1.2 – График переходной характеристики

Система при воздействии на нее импульсного сигнала со временем возвращается в исходное состояние. При воздействии ступенчатого сигнала со временем система приходит в однозначное состояние. Следовательно, заданная по условию система является устойчивой [1].

## 1.2 Построение асимптотических логарифмических частотных характеристик

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) показывает, как изменяется отношение выходного сигнала к входному в зависимости от частоты. Фазочастотная характеристика (ФЧХ) показывает изменение сдвига фаз между входным и выходным сигналами в зависимости от частоты [1].

Преобразуем передаточную функцию к следующему виду:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.13) |

Передаточная функция представляет собой произведение трех апериодических звеньев и одного форсирующего звена.

(1.14)

Найдем сопрягающие частоты звеньев и коэффициент усиления:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.15) |

. (1.16)

Фазочастотная характеристика примет вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.17) |

Используя найденные значения коэффициента усиления и сопрягающих частот, построим графики ЛАЧХ и ФЧХ. Графики ЛАЧХ и ФЧХ представлен на рисунке 1.3 и рисунки 1.4. Графики ЛАЧХ и ФЧХ, построенные в пакете Matlab представлены на рисунке 1.5.

Построенные вручную характеристики подобны построенным в пакете Matlab.

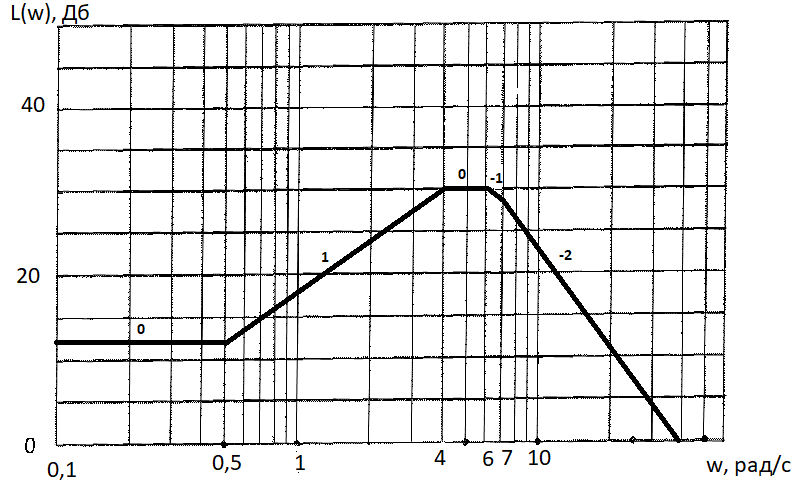


Рисунок 1.3 – Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика

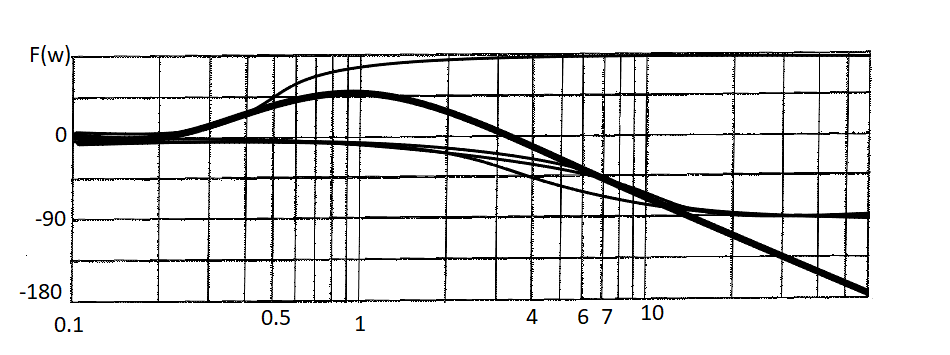


Рисунок 1.4 – Фазочастотная характеристика



Рисунок 1.5 – Графики частотных характеристик в Matlab

## 1.3 Составление уравнений состояний в нормальной и канонической формах

Кроме входных и выходных переменных при описании систем выделяют переменные , связанные с внутренней структурой устройства – переменные состояния. Тогда систему можно описать с помощью уравнений состояния [3].

Нормальная форма уравнений состояния имеет вид:

(1.18)

Здесь – квадратная матрица, размер которой определяется порядком дифференциального уравнения. Элементы, стоящие над главной диагональю – единицы, элементы нижней строки – коэффициенты левой части дифференциального уравнения, взятые с противоположным знаком. Все остальные элементы – нули. Такая матрица называется матрицей Фробениуса.

Согласно выражению (1.1) дифференциальное уравнение системы имеет вид:

(1.19)

где и – коэффициенты уравнения.

Элементы матриц B и D вычисляются по следующим рекуррентным соотношениям:

.

Поставив рассчитанные матрицы в систему (1.18), получим:

Схема модели в пространстве состояний в нормальной форме, построенная вручную, представлена на рисунке 1.6.



Рисунок 1.6 – Схема модели в нормальной форме

Построим и промоделируем схему модели в нормальной форме в Simulink. Результат моделирования представлен на рисунке 1.7.



Рисунок 1.7 – Результат моделирования модели в нормальной форме в Simulink

Запишем уравнения состояния в канонической форме. Для этого ведем новую переменную состояния , которая связана с переменной состояния следующим образом: . – это модальная матрица, которая имеет вид:

где –характеристические числа матрицы Фробениуса .

Уравнения состояния системы в канонической форме имеют вид:

(1.20)

где – диагональная матрица вида:

,

где – матрица обратная матрице .

Поставив рассчитанные матрицы в систему (1.20), получим:

(1.21)

Схема модели в пространстве состояний в канонической форме построенные вручную представлена на рисунке 1.8.



Рисунок 1.8 – Схема модели в канонической форме

Построим и промоделируем модель в канонической форме в Simulink. Результат моделирования представлен на рисунке 1.9.



Рисунок 1.9 – Результат моделирования модели в канонической форме в Simulink

Вид переходного процесса для нормальной и канонической форм совпадает.

## 1.4 Решение уравнений состояния в канонической форме

Решим уравнение состояния (1.21), представленное в канонической форме. Каждое из дифференциальных уравнений первого порядка зависит только от одной переменной и его решение в общем виде имеет вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.22) |

Определим начальные условия для вектора :

Найдем выражения для :

Выполним проверку:

; .

Проверим, одинаково ли значение коэффициента усиления:

Для передаточной функции (1.1):

Для переходной функции (1.12):

.

По модели в пространстве состояний в канонической форме:

По аналитической записи импульсной переходной характеристики:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Значения коэффициента усиления совпадают.

# 2 Линейное программирование

## 2.1 Расчет оптимального плана и экстремального значения функции цели

К задачам линейного программирования относятся задачи нахождения условного экстремума функции нескольких переменных, при условии, что функция и ограничения линейны [2].

Общий вид задачи линейного программирования на поиск максимума:

где – матрица из коэффициентов при переменных ограничений;

– вектор-столбец свободных членов в ограничениях;

– вектор-строка коэффициентов при переменных функции цели.

Условие задачи:

(2.1)

Решим задачу (2.1) с помощью симплекс-метода.

Поскольку предстоит решить задачу на нахождение максимума функции цели, то все исходные ограничения должны иметь знак меньше или равно. Для этого все ограничения системы (2.1) со знаком «» умножим на :

(2.2)

Введем в систему (2.2) дополнительные переменные для ограничений вида неравенств, чтобы преобразовать их в равенства. Для ограничения вида равенства воспользуемся методом искусственного базиса и введем искусственную переменную :

(2.3)

В связи с вводом искусственных переменных функция цели примет вид:

, (2.4)

где – коэффициент штрафа за введение искусственных переменных.

Выразим из ограничения системы:

,

и подставим в выражение (2.4):

(2.5)

При составлении первой симплекс-таблицы будем полагать, что исходные переменные являются небазисными, а введенные переменные – базисными. В задачах максимизации знак коэффициентов при небазисных переменных в - и -строках изменяется на противоположный. Знак постоянной величины в -строке не изменяется. Оптимизация проводится сначала по -строке. Выбор ведущих столбца и строки, все симплексные преобразования осуществляются как в обычном симплекс-методе [2].

Шаг 1. Составим начальную симплекс таблицу:

Таблица 2.1 – Первая итерация

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| БП | Своб. члены | НП | | |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Решение не является допустимым, так как существуют свободные члены, которые меньше нуля.

Шаг 2.Выберем строку , в которой свободный член меньше нуля, и выберем в ней максимальный по абсолютному значению отрицательный элемент, который станет ведущим. Строка будет исключена из базиса, а столбец будет включен в базис.

Максимальный по абсолютному значению элемент строки соответствует столбцу . Столбец будет исключен из базиса. Ведущий элемент выделен полужирным шрифтом в таблице 2.1.

Пересчитаем таблицу в соответствии с правилами.

Искусственные переменные, исключенные из базиса, в него больше не возвращаются, поэтому столбцы элементов таких переменных опускаются.

Таблица 2.2 – Вторая итерация

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| БП | Своб. члены | НП | |  |
|  |  |  |
|  | 3 |  |  |  |
|  | 6 |  |  |  |
|  | 3 |  |  |  |
|  | 0 | **7** | -7 |  |
|  | -12 |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Решение является допустимым, так как нет отрицательных свободных членов. Решение не является оптимальным, так как есть отрицательные элементы в -строке.

Шаг 3.Выберем столбец , в котором элемент в F-строке меньше нуля, и выберем в нём максимальный элемент, который станет ведущим. Строка будет исключена из базиса, а столбец будет включен в базис.

Ведущий элемент выделен полужирным шрифтом в таблице 2.2.

Пересчитаем таблицу в соответствии с правилами.

Таблица 2.3 – Третья итерация

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| БП | Своб. члены | НП | |  |
|  |  |  |
|  | 3 |  | 0 |  |
|  | 6 |  | 2 |  |
|  | 3 |  | 1 |  |
|  | 0 |  | -1 |  |
|  | -12 |  | 0 |  |

Решение является допустимым, так как нет отрицательных свободных членов. Решение является оптимальным, так как нет отрицательных элементов в -строке.

Из симплекс таблицы 2.3 получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

В исходную функцию цели и ограничения входят только переменные , поэтому оптимальный план решения задачи:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.6) |

Экстремальное значение функции (2.1) примет значение:

## 2.2 Исследование двойственной задачи линейного программи­рования

Предположим, что у нас есть прямая задача вида:

Тогда двойственной задачей к этой прямой задаче будет задача вида:

(2.7)

Составим двойственную задачу для задачи (2.1):

(2.8)

Преобразуем ограничения неравенств в равенства:

(2.9)

Составим симплекс таблицу, используя выражения (2.8) и (2.9):

Таблица 2.4 – Первая итерация

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| БП | Своб. члены | НП | | | |
|  |  |  |  |
|  | -4 | -2 | -3 | 0 | **-5** |
|  | 4 | 3 | 2 | -1 | -3 |
|  | 4 | 2 | 1 | –1 | 5 |
|  | 0 | –9 | 0 | 6 | 9 |

Решение не является допустимым, так как существуют свободные члены меньше нуля.

Выберем строку , в которой свободный член меньше нуля, и выберем в ней максимальный по абсолютному значению отрицательный элемент, который станет ведущим. Строка будет исключена из базиса, а столбец будет включен в базис.Выбранный ведущий элемент выделен полужирным шрифтом в таблице 2.3.

Пересчитаем таблицу в соответствии с правилами.

Таблица 2.5 – Вторая итерация

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| БП | Своб. члены | НП | | | |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | -1 |  |
|  | 0 |  |  |  |  |
|  |  |  |  | 6 |  |

Решение является допустимым, так как нет отрицательных свободных членов. Решение не является оптимальным, так как есть отрицательные элементы в -строке.

Выберем столбец , в котором элемент в F-строке меньше нуля, и выберем в нём максимальный элемент, который станет ведущим. Строка будет исключена из базиса, а столбец будет включен в базис.

Выбранный ведущий элемент выделен полужирным шрифтом в таблице 2.5.Пересчитаем таблицу в соответствии с правилами.

Таблица 2.6 – Третья итерация

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| БП | Своб. члены | НП | | | |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  | 0 |  |  |  |  |
|  |  |  |  | 3 | 0 |

Решение является допустимым и является оптимальным.

Из симплекс таблицы 2.6 получим:

В исходную функцию цели и ограничения входят только переменные , поэтому оптимальный план решения задачи:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Экстремальное значение функции (2.8) примет значение:

Переменным прямой задачи поставим в соответствие переменные двойственной задачи:

В -строке симплекс таблицы 2.6 двойственной задачи расположены коэффициенты при небазисных переменных . Используя соответствие, найдем оптимальное решение прямой задачи:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Тогда оптимальный план прямой задачи:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Оптимальный план прямой задачи, найденный путем решения двойственной задачи, совпадает с оптимальным планом в выражении (2.6), полученным при решении прямой задачи. Экстремальные значения функции цели прямой и двойственной задачи совпадают.

Таким образом, переход к двойственной задаче в некоторых случаях может упростить решение за счет уменьшения количества ограничений, а также возможно уменьшение числа шагов при решении двойственной задачи симплекс-методом.

## 2.3 Нахождение целочисленного решения задачи

Задача, в которой некоторые переменные могут принимать только целые значения, называется частично-целочисленной.

Для задачи (2.1) найдем частично-целочисленное решение, считая, что переменная должна быть целой.

Дополнительное ограничение должно быть составлено по строке симплекс-таблицы с переменной, значение которой должны быть целочисленными [1]. Дополнительное ограничение имеет вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.10) |

где – коэффициенты при небазисных переменных в данной строке;

– дробная часть свободного члена.

С учетом выражения (2.10) для переменной получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.11) |

Добавим условие (2.11) в симплекс-таблицу:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  | (2.12) |

Учтем (2.12) путем добавления дополнительной строки в симплекс-таблицу (таблицу 2.6). Тогда симплекс-таблица примет вид:

Таблица 2.7 – Первая итерация

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| БП | Своб. члены | НП | | | |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  | 0 |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | 3 | 0 |

Решение не является допустимым, так как существует свободный член меньше нуля.

В строке с отрицательным свободным членом найдем отрицательный элемент. Этот элемент станет ведущим. Ведущий элемент выделен полужирный шрифтом в таблице 2.7.

Симплекс таблица после пересчета имеет вид, представленный в таблице (2.8).

Таблица 2.8 – Вторая итерация

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| БП | Своб. Члены | НП | | | |
|  |  |  |  |
|  | 0 |  | 1 |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Решение является оптимальным и допустимым.

Из симплекс-таблицы 2.8 получаем:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.13) |

В исходную функцию цели и ограничения входят только переменные ,, поэтому оптимальный план решения задачи:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.14) |

Экстремальное значение функции (2.1) примет значение:

Таким образом, найденное оптимальное решение соответствует требованию целочисленного значения переменной .

# 3 Нелинейное программирование

## 3.1 Нахождение безусловного экстремума функции *F*(*x*)

Исходная задача имеет вид:

(3.1)

Начальная точка имеет координаты:

График функции, построенный в Matlab, представлен на рисунке 3.1.

F

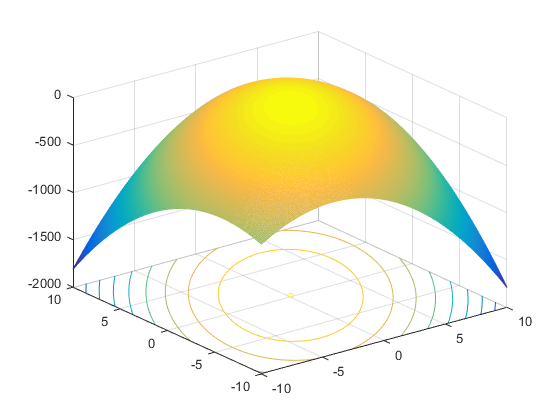


Рисунок 3.1 – График функции в Matlab

Решим задачу различными методами и сравним полученные результаты.

Метод Ньютона-Рафсона.

В данном методе решение заданной нелинейной задачи, как правило, происходит за один шаг, т.е. будет решением данной задачи.

Здесь – матрица Гессе (матрица, составленная из вторых частных производных), – значение градиента функции в начальной точке.

Найдем вид вектора градиента:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2) |

В точке вектор градиента примет значение:

Составим матрицу Гессе:

Найдем обратную матрицу для матрицы Гессе.

Координаты следующей точки будут определятся по выражению:

Найдем значение вектора градиента по выражению (3.2) в точке :

Следовательно в точке функция достигает своего максимального значения:

Метод наискорейшего спуска

В данном методе на каждой итерации в текущей точке определяется направление движения (вектором градиента для задачи на максимум) и величина шага в данном направлении [2].

*Шаг 1.*

Координаты точки будут определяться выражением:

где – значение вектора градиента, вычисленное в точке ;

– величина шага в данном направлении.

Найдем значение функции по выражению (3.1) в точке :

Найдем направление вектора градиента по выражению (3.2) в точке :

Подставим известные значения в выражение для определения координаты следующей точки:

Найдем величину шага . Для этого подставим в функцию (3.1) найденные выражения для , т.е. получим функцию зависящую от величины шага. Затем исследуем полученную функцию на экстремум, для чего возьмем производную от полученной функции и приравняем к нулю:

Тогда координаты точки будут равны:

Найдем значение функции по выражению (3.1) в точке :

*Шаг 2.*

Координаты точки будут определяться выражением:

Найдем направление вектора градиента по выражению (3.2) в точке :

Подставим известные значения в выражение для определения координаты следующей точки:

Найдем величину шага . Для этого подставим в функцию (3.1) найденные выражения для , т.е. получим функцию зависящую от величины шага. Затем исследуем полученную функцию на экстремум:

Тогда координаты точки будут равны:

Найдем значение функции по выражению (3.1) в точке :

*Шаг 3.*

Координаты точки будут определяться выражением:

Найдем направление вектора градиента по выражению (3.2) в точке :

Подставим известные значения в выражение для определения координаты следующей точки:

Найдем величину шага :

Тогда координаты точки будут равны:

Найдем значение функции по выражению (3.1) в точке :

Графическая интерпретация метода найскорейшего спуска представлена на рисунке 3.2.

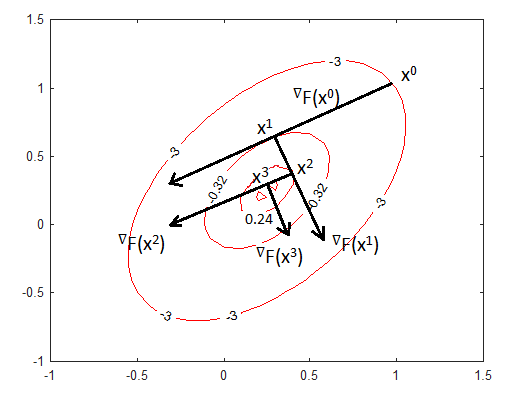


Рисунок 3.2 – Графическая интерпретация метода наискорейшего спуска

Метод наискорейшего спуска для данной функции медленно сходится к точному решению, что видно из расчетов и рисунка.

## 3.2 Нахождение экстремума функции *F*(*x*) с учетом системы ограничений

На задачу (3.1) наложим ограничения на значения переменных в соответствии с условием. Полученная задача примет вид:

(3.3)

Для графического построения области определения преобразуем неравенства:

Область определения построена на рисунке 3.3.

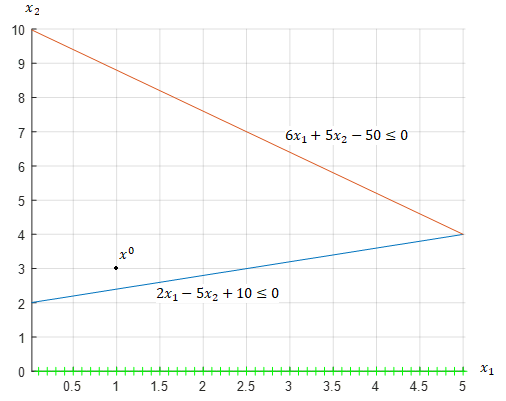


Рисунок 3.3 – Область допустимых значений переменных

Метод допустимых направлений Зойтендейка.

Метод Зойтендейка является расширением метода наискорейшего спуска, позволяющий учитывать ограничения. На каждом шаге строится возможное допустимое направление шага, и выбирается величина шага в соответствии с ограничениями [1].

*Шаг 1.*

Координаты точки будут определяться выражением:

Найдем направление вектора градиента по выражению (3.2) в точке :

Подставим известные значения в выражение для определения координаты следующей точки:

Найдем величину шага . Для этого подставим в функцию (3.1) найденные выражения для , т.е. получим функцию зависящую от величины шага. Затем исследуем полученную функцию на экстремум:

Найдем интервал допустимых значений , который обеспечивает нахождение точки внутри ОДЗП:

Найденное не входит в найденный выше интервал. В качестве величины шага возьмем правую границу интервала .

Тогда координаты следующей точки определяться по выражению:

*Шаг 2.*

Координаты точки будут определяться выражением:

Найдем направление вектора градиента по выражению (3.2) в точке :

Вектор градиента направлен за ОДЗП. Поэтому необходимо найти направление , в сторону которого нужно двигаться. Найдем это направление из условия , где – вектор, составленный из коэффициентов при переменных ограничения, на котором находится точка. Так как точка принадлежит граничной прямой , то направление очередного шага определяем из условия:

Отсюда следует, что . Тогда из условия нормировки:

При движении вдоль граничной прямой следует двигаться в направлении, которое составляет острый угол с вектором градиента, т.е. скалярное произведение векторов и должно быть больше или равно нуля [2]. Это достигается при выборе:

Координаты точки будут определяться выражением:

Подставим известные значения в выражение для определения координаты следующей точки:

Найдем величину шага так же, как и на предыдущих шагах:

Найдем интервал допустимых значений , который обеспечивает нахождение точки внутри ОДЗП. Ограничение, вдоль которого происходит движение, опускается:

Найденное входит в найденный выше интервал.

Найдем координаты следующей точки:

*Шаг 3.*

Найдем направление вектора градиента по выражению (3.2) в точке :

Проверим перпендикулярность направления движения и вектора градиента , для этого перемножим эти вектора скалярно:

Скалярное произведение равно нулю, следовательно, вектор градиента перпендикулярен направлению движения, значит максимум достигнут.

Найдем значение функции по выражению (3.1) в точке :

Графическая интерпретация задачи представлена на рисунке 3.4.

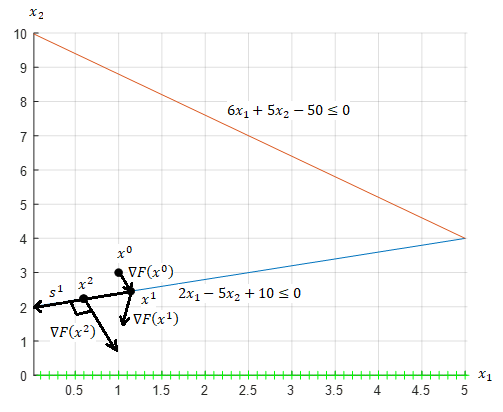


Рисунок 3.4 – Графическая интерпретация метода Зойтендейка

Метод Куна-Таккера.

Метод предназначен для решения задачи, в которой функция является квадратичной, а все ограничения линейны.

Метод основан на использовании теоремы Куна-Таккера.

Функция Лагранжа имеет вид:

(3.3)

где – неопределенные множители Лагранжа;

– левые части ограничений задачи, приведенные к нулевой правой части.

Условия теоремы Куна-Таккера для задачи на поиск максимума:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.4) |

Преобразуем ограничения задачи к виду с нулевой правой частью. При этом поскольку решается задача на поиск максимума, ограничения приводятся к знаку больше или равно:

Составим функцию Лагранжа для задачи:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.5) |

Составим систему уравнений в соответствии с выражением (3.4):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.6) |

Приведем ограничения задачи (3.6) к виду равенств, введя дополнительные переменные :

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.7) |

Для решения задачи линейного программирования (3.7) составим симплекс-таблицу.

Таблица 3.1 – Исходная симплекс-таблица

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| БП | Своб. члены | НП | | | |
|  |  |  |  |
|  |  |  | 6 |  |  |
|  | -1 | 6 |  | 5 |  |
|  | -10 | 2 |  | 0 | 0 |
|  |  | 6 | 5 | 0 | 0 |

Решение не является допустимым, так как есть отрицательные свободные члены.

Выберем строку , в которой свободный член меньше нуля, и выберем в ней максимальный по абсолютному значению отрицательный элемент, который станет ведущим. Строка будет исключена из базиса, а столбец будет включен в базис.Выбранный ведущий элемент выделен полужирным шрифтом в таблице 3.1.

Симплекс таблица после пересчета имеет вид, представленный в таблице (3.2).

Таблица 3.2 –Вторая итерация

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| БП | Своб. члены | НП | | | |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  | -1 |  |  |  |
|  |  | 9 |  |  |  |

Решение не является допустимым, так как есть отрицательные свободные члены.

Выберем строку , в которой свободный член меньше нуля, и выберем в ней максимальный по абсолютному значению отрицательный элемент, который станет ведущим. Строка будет исключена из базиса, а столбец будет включен в базис.Выбранный ведущий элемент выделен полужирным шрифтом в таблице 3.1.

Симплекс таблица после пересчета имеет вид, представленный в таблице (3.3).

Таблица 3.3 – Третья итерация

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| БП | Своб. члены | НП | | | |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Решение не является допустимым, так как есть отрицательные свободные члены.

Выберем строку , в которой свободный член меньше нуля, и выберем в ней максимальный по абсолютному значению отрицательный элемент, который станет ведущим. Строка будет исключена из базиса, а столбец будет включен в базис.Выбранный ведущий элемент выделен полужирным шрифтом в таблице 3.1.

Симплекс таблица после пересчета имеет вид, представленный в таблице (3.4).

Таблица 3.4 –Четвёртая итерация

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| БП | Своб. члены | НП | | | |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Решение является допустимым, так как нет отрицательных свободных членов. Решение является оптимальным, так как выполняется следующее условие

Из симплекс таблицы 3.4 получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Параметрами координаты искомой точки являются только , поэтому оптимальный план решения задачи:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Искомая точка экстремума .

Решение задачи методом Куна-Таккера совпадает с решением методом Зойтендейка.

Метод линейных комбинаций.

В данном методе на каждом шаге в предыдущей точке нелинейная функция цели линеаризуется посредством разложения в ряд Тейлора в окрестности данной точки, пренебрегая всеми степенями старше первой. Затем решается задача линейного программирования, её решение будет в некоторой вершине ОДЗП. После этого необходимо найти величину шага в направлении вершины и координаты следующей точки [2].

Линеаризованная функция имеет вид:

Здесь является постоянной величиной, поэтому не оказывает влияние на максимизацию. Тогда можно записать:

Решим задачу (3.2) с помощью метода линейных комбинаций.

*Шаг 1.*

Начальная точка: .

Найдем направление вектора градиента по выражению (3.2) в точке :

Составим для текущего шага:

Решим задачу линейного программирования:

Для получения решения данной задачи составим симплекс-таблицу и решим ее согласно правилам:

Таблица 3.5 – Первая итерация

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| БП | Своб. чл. | НП | |
|  |  |
|  |  |  |  |
|  | 50 | 6 |  |
|  | 0 |  |  |

Решение не является допустимым, так как есть отрицательные свободные члены.

Выберем строку , в которой свободный член меньше нуля, и выберем в ней максимальный по абсолютному значению отрицательный элемент, который станет ведущим. Строка будет исключена из базиса, а столбец будет включен в базис.Выбранный ведущий элемент выделен полужирным шрифтом в таблице 3.1.

Симплекс таблица после пересчета имеет вид, представленный в таблице (3.6).

Таблица 3.6 – Вторая итерация

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| БП | Своб. чл. | НП | |
|  |  |
|  | 2 |  |  |
|  | 40 | 8 | 1 |
|  | -46 |  |  |

Решение является допустимым, так как нет отрицательных свободных членов. Решение является оптимальным, так как нет отрицательных элементов в -строке.

Из симплекс-таблицы 3.6 получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

В исходную функцию цели и ограничения входят только переменные , поэтому оптимальный план решения задачи:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Найденное решение .

Тогда координаты точки можно представить в виде:

Подставим известные значения в выражение для определения координаты следующей точки:

Найдем величину шага . Для этого подставим в функцию (3.1) найденные выражения для , т.е. получим функцию зависящую от величины шага. Затем исследуем полученную функцию на экстремум:

Найденное входит в интервал . Поэтому в качестве выберем правую границу интервала . Тогда координаты следующей точки определятся по выражению:

*Шаг 2.*

Найдем направление вектора градиента по выражению (3.2) в точке :

Составим для текущего шага:

Решим задачу линейного программирования:

Для получения решения данной задачи составим симплекс-таблицу и решим ее согласно правилам:

Таблица 3.7 – Исходная симплекс-таблица

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| БП | Своб. чл. | НП | |
|  |  |
|  |  |  |  |
|  | 50 | 6 |  |
|  | 0 |  |  |

Решение не является допустимым, так как есть отрицательные свободные члены.

Выберем строку , в которой свободный член меньше нуля, и выберем в ней максимальный по абсолютному значению отрицательный элемент, который станет ведущим. Строка будет исключена из базиса, а столбец будет включен в базис.Выбранный ведущий элемент выделен полужирным шрифтом в таблице 3.7.

Симплекс таблица после пересчета имеет вид, представленный в таблице (3.8).

Таблица 3.8 – Вторая итерация

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| БП | Своб. чл. | НП | |
|  |  |
|  | 2 |  |  |
|  | 40 | **8** | 1 |
|  | -38 |  |  |

Решение является допустимым, так как нет отрицательных свободных членов. Решение не является оптимальным, так как есть отрицательные элементы в -строке.

Выберем столбец , в котором элемент в F-строке меньше нуля, и выберем в нём максимальный элемент, который станет ведущим. Строка будет исключена из базиса, а столбец будет включен в базис.Выбранный ведущий элемент выделен полужирным шрифтом в таблице 3.1.

Симплекс таблица после пересчета имеет вид, представленный в таблице (3.9).

Таблица 3.9 – Третья итерация

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| БП | Своб. чл. | НП | |
|  |  |
|  | 4 |  |  |
|  | 5 |  |  |
|  | -6 |  |  |

Решение является допустимым, так как нет отрицательных свободных членов. Решение является оптимальным, так как нет отрицательных элементов в -строке.

Из симплекс-таблицы 3.9 получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

В исходную функцию цели и ограничения входят только переменные , поэтому оптимальный план решения задачи:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Найденное решение .

Тогда координаты следующей точки можно представить в виде:

Найдем величину шага так же, как и на предыдущем шаге:

Найденное входит в интервал . Тогда координаты следующей точки определятся по выражению:

Найдем направление вектора градиента по выражению (3.2) в точке :

Вектор градиента направлен в вершине ОДЗП так, что не позволяет двигаться ни внутрь ОДЗП, ни по ее границам.

Графическая интерпретация решения задачи методом линейных комбинаций представлена на рисунке 3.5.

Решение методом линейных комбинаций совпадает с решением методом Зойтендейка и методом Куна-Таккера.

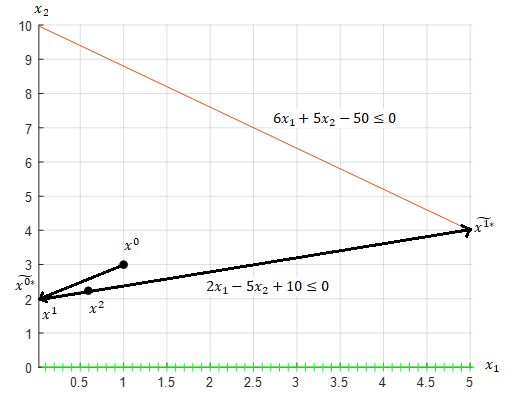


Рисунок 3.5 – Графическая интерпретация метода линейных комбинаций

# Заключение

В первой части курсового проекта выполнен анализ линейной системы 3-го порядка, заданной в виде передаточной функции. Получены выражения для построения временных характеристик системы. По заданной передаточной функции были построены логарифмические амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики. Правильность результатов построения подтверждена моделированием в пакете Matlab/Simulink.

Также на основании заданной передаточной функции были составлены уравнения состояния в нормальной и канонической формах. Получены схемы моделей системы и проведено моделирование в пакете Matlab/Simulink.

Во второй части курсового проекта решена прямая задача линейного программирования с применением симплекс-таблиц, составлена и решена двойственная задача к прямой. Решение прямой задачи и полученное решение при приведении в соответствие переменных двойственной и прямой задачи совпадает. Также решена частично-целочисленная задача.

В третьей части курсового проекта решены задачи нелинейного программирования без ограничений и с ограничениями. В решении задачи без ограничений показано, что методом Ньютона-Рафсона задача решается за один шаг, а метод наискорейшего спуска медленно сходится к решению. В задаче нелинейного программирования с ограничениями показано, что все методы решения задач одинаково сходятся к одному решению, но за разное количество шагов. Приведены графики интерпретации метода наискорейшего спуска, метода допустимых направлений Зойтендейка и метода линейных комбинаций.

# Список использованных источников

[1] Павлова, А. В. Электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Математические основы теории систем» для студентов специальности 1-53 01 07 Информационные технологии и управление в технических системах [Электронный ресурс] / А. В. Павлова, М. К. Хаджинов. – Режим доступа: EUMK\_MOTS\_2013.zip.

[2] Павлова, А. В. Математические основы теории систем : конспект лекций для студентов специальности «Информационные технологии и управление в технических системах». В 2 ч. / А. В. Павлова. – Минск : БГУИР, 2010. – Ч. 2. – 144 с.

[3] Певзнер, Л. Д. Математические основы теории систем / Л. Д. Певзнер, Е. П. Чураков – М. : Высш. шк., 2009.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Обозначение | | | | Наименование | | | | Дополнительные сведения | | | |
|  | | | | Текстовые документы | | | |  | | | |
|  | | | |  | | | |  | | | |
| ГУИР КП 1–53 01 07 022 ПЗ | | | | Пояснительная записка | | | | 53 с. | | | |
|  | | | |  | | | |  | | | |
|  | | | |  | | | |  | | | |
|  | | | | Графические документы | | | |  | | | |
|  | | | |  | | | |  | | | |
| ГУИР 421213 001 Э1 | | | | Схемы моделей | | | | Формат А2 | | | |
|  | | | | Временные характеристики | | | |  | | | |
|  | | | |  | | | |  | | | |
| ГУИР 421213 002 РР | | | | Частотные характеристики | | | | Формат А2 | | | |
|  | | | |  | | | |  | | | |
| ГУИР 421213 003 РР | | | | Графическая интерпретация методов | | | | Формат А2 | | | |
|  | | | | поиска экстремума | | | |  | | | |
|  | | | |  | | | |  | | | |
| ГУИР 421213 004 ПД | | | | Схема алгоритма метода | | | | Формат А2 | | | |
|  | | | | Зойтендейка | | | |  | | | |
|  | | | |  | | | |  | | | |
|  | | | |  | | | |  | | | |
|  | | | |  | | | |  | | | |
|  | | | |  | | | |  | | | |
|  | | | |  | | | |  | | | |
|  | | | |  | | | |  | | | |
|  | | | |  | | | |  | | | |
|  | | | |  | | | |  | | | |
|  | | | |  | | | |  | | | |
|  | | | |  | | | |  | | | |
|  | | | |  | | | |  | | | |
|  | | | |  | | | |  | | | |
|  | | | |  | | | |  | | | |
|  | | | |  | | | |  | | | |
|  | | | |  | | | |  | | | |
|  | | | |  | | | |  | | | |
|  | | | |  | | | |  | | | |
|  | | | |  | | | |  | | | |
|  | | | |  | | | |  | | | |
|  | | | |  | | | |  | | | |
|  |  |  |  |  | *БГУИР КП 1-53 01 07 022 Д1* | | | | | | |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| Изм. | Л. | № докум. | Подп. | Дата | Математические модели систем управления и методы оптимизации  Ведомость курсового проекта |  | | | | Лист | Листов |
| Разраб. | | Сеглюк |  | 22.12.21 |  | Т | |  | 53 | 53 |
| Пров. | | Стасевич |  | 22.12.21 | Кафедра СУ  гр. 022402 | | | | | |
|  | |  |  |  |
|  | |  |  |  |
|  | |  |  |  |